PARTIELLE ABLEITUNGEN

Wir üben den Umgang mit partiellen Ableitungen.

[P30] *Kettenregel für Jacobi-Matrizen*
Zeigen Sie mit $\mathrm{d}h_{|x} = \mathrm{d}x^i\,\partial_{x^i}h_{|x}$ für die zusammengesetzte Funktion $z(y(x))$, $z = (z^1, z^2, \ldots, z^n)$, $y = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$, $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ die Identität

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial z^k}{\partial y^j}\Big|_{y(x)} = \frac{\partial (z\circ y)^k}{\partial x^i}\Big|_x .$$

[P31] *Änderung der Determinante*
Die Determinante einer Matrix M,

$$\det M = \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} M^{i_1}{}_1 M^{i_2}{}_2 \ldots M^{i_n}{}_n ,$$

aufgefasst als Funktion eines herausgegriffenen Matrixelements $x = M^i{}_j$, ist linear inhomogen, also von der Form $\det M = ax + b$.

(a) Geben Sie den zu $M^i{}_j$ gehörigen Faktor a als Polynom der Matrixelemente an.
(b) Wie hängt er mit $\det M$ und den Matrixelementen $(M^{-1})^k{}_l$ der inversen Matrix zusammen?
(c) Was ist die partielle Ableitung von $\det M$ nach $M^i{}_j$?

Hinweis: Diese Betrachtungen zeigen, dass sich bei Änderung der Matrix M um $\mathrm{d}M$ die Determinante wie folgt ändert:

$$\mathrm{d}(\det M) = \det M (M^{-1})^k{}_l\,\mathrm{d}M^l{}_k = \mathrm{Sp}\Big(\det M\, M^{-1}\,\mathrm{d}M\Big)\,. \qquad (1)$$

Rufen Sie sich [P23] in Erinnerung und machen Sie sich klar, dass die Adjunkte $N = \det M\, M^{-1}$ auch dann wohldefiniert ist, wenn die Matrix M gar nicht invertierbar ist. Damit folgt, dass Gleichung (1) gültig ist, egal ob M invertierbar ist oder nicht.

[P25] *$SU(2)$ und Drehungen*
Setzen Sie die Bearbeitung dieser Aufgabe von vorvorvorvorvorletzter Woche fort.